

La mesure et ses incertitudes



The image shows a vernier caliper with a main scale in millimeters (0 to 10 mm) and a vernier scale. A small metal cylinder is being measured. Red circles are drawn around the '0' mark on the main scale and the '8' mark on the vernier scale. Red arrows point from these marks to the text '19, 8 mm'.

19, 8 mm

V.Morin 2023

La différence entre une mesure approchée (réelle)
et la mesure exacte (inaccessible) :

erreur absolue.

Il faudra un moyen d'estimer cette erreur absolue.

Il faudra d'abord estimer la mesure exacte.

L'erreur absolue rapportée à la valeur exacte :

erreur relative.

Même problème d'estimation.

La mesure exacte : une fiction mathématique

Pas d'unité arbitrairement petite permettant d'encadrer une grandeur avec une précision infiniment croissante ni d'appareil parfait donnant à coup sûr le résultat exact.

La mesure exacte : un concept utile

il recouvre ce que l'on cherche à quantifier.

Dans la réalité il n'existe que des mesures approchées (de cette mesure exacte supposée).

Erreur absolue maximum : l'erreur absolue peut généralement être bornée en étudiant l'appareillage ou le processus de mesure.

Ex : en mesurant quelqu'un à la toise on ne se trompe pas de plus d'un cm.

On estime la mesure exacte en répétant N fois la mesure précise d'une grandeur (N environ 10 fois si possible).

Le problème devient statistique.

Généralement la mesure exacte estimée est la simple moyenne des N mesures approchées.

L'erreur absolue peut ensuite être estimée par l'écart moyen en valeur absolue.

Si pas de grande précision requise pour une mesure, on peut prendre le nombre d'unités n ou $n+1$ le plus proche de la grandeur mesurée.

Ex : Une personne de taille 169 cm signifie que 169 unités centimétriques ajoutées forment la grandeur la plus proche de la « vraie taille ».

Note :

les lois physiques sont toujours des lois expérimentales (les lois théoriques doivent être validées par l'expérience).

Les lois physiques sont valables :

- dans des conditions précises,
- dans un domaine limité de grandeurs agissantes et résultantes,
- grandeurs mesurées avec une précision donnée.

Ex : Selon G.Bruhat, la loi de Mariotte $PV = Cte$ n'est vraie pour des pressions d'air que si P vaut 1 à 2 atm et si la précision des mesures de P et V est de 1/1000 environ.

Combinaison des erreurs

Soit une loi physique :

$$z = f(x, y)$$

(fournit une mesure z de la grandeur Z par calcul connaissant les mesures x et y des grandeurs X et Y).

On calcule la différentielle de f :

$$dz = f_{,x} dx + f_{,y} dy$$

On assimile les erreurs absolues maximum Δx et Δy sur X et Y aux éléments dx et dy .

On obtient l'erreur absolue maximum Δz sur Z assimilée à dz par :

$$\Delta z = |f_{,x}| \Delta x + |f_{,y}| \Delta y$$

Application : détermination de la masse m via le poids f et l'accélération de la pesanteur g :

$$m = f / g$$

fournit une mesure m de la masse subissant la force (poids) mesurée par f dans le champ de gravitation d'accélération de mesure g .

On calcule la différentielle de m :

$$dm = (1/g) df + (- f/g^2) dg$$

On obtient l'erreur absolue maximum Δm sur la masse par :

$$\Delta m = 1/g \Delta f + f/g^2 \Delta g$$

Application suite : Données numériques

$\Delta f = 1$ cN (centi Newton) pour $f = 2$ N. Soit 0,5% erreur relative maximum.

Erreur relative maximum de 1% pour g estimé à 9,81 m/s², donc $\Delta g = 0,0981$ m/s².

$$\begin{aligned}\Delta m &= 1/g \Delta f + f/g^2 \Delta g \\ &= 1/9,81 \cdot 0,01 + 2 / 9,81^2 \cdot 0,0981 \\ &= 0,102 \cdot 0,01 + 0,021 \cdot 0,0981 \\ &= 3,06e-3 \text{ kg} = 3,06 \text{ g}\end{aligned}$$

pour $m = 2 / 9,81 = 0,204$ kg
soit erreur relative de 1,5% sur m .

Application suite :

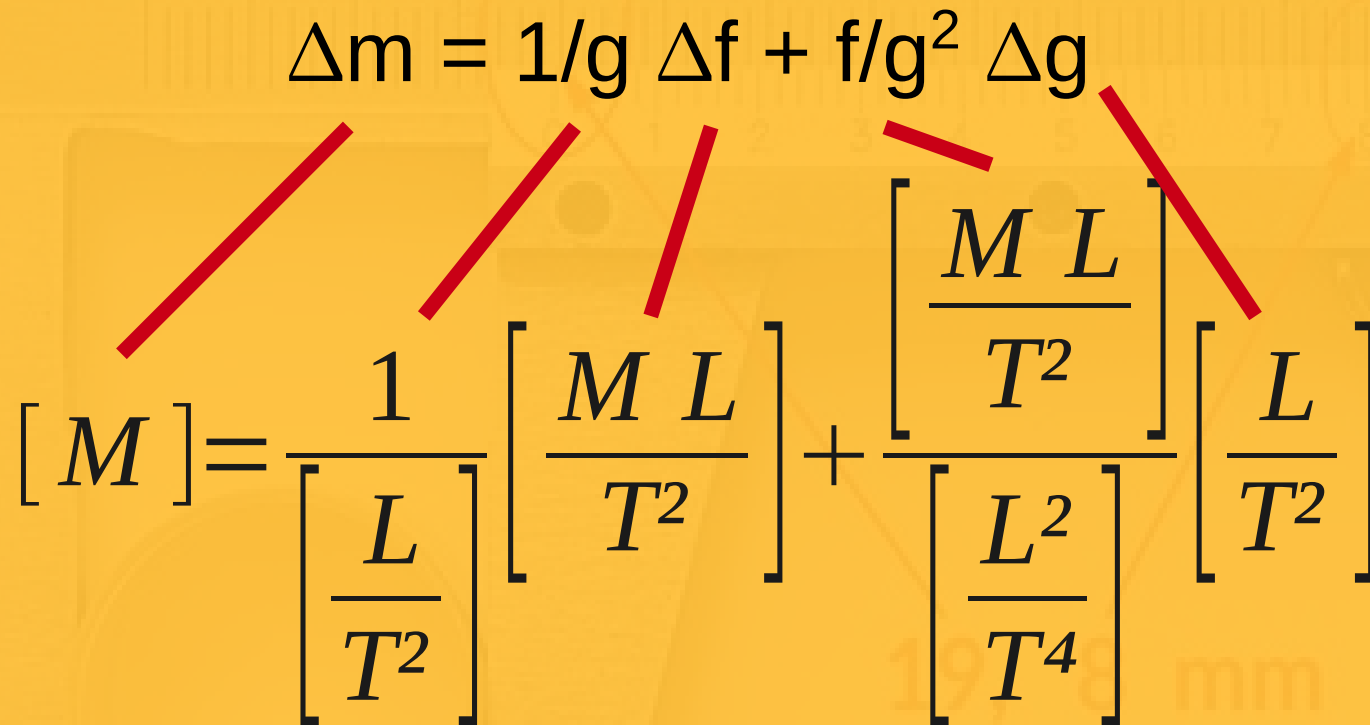
On remarque que l'erreur relative de 1,5% sur m est la somme des erreurs relatives sur f (0,5%) et sur g (1%).

C'est toujours vrai :

L'erreur relative sur un produit ou un quotient de termes est la somme des erreurs relatives des facteurs.

Aplication suite

tant qu'à faire, vérifions la cohérence des dimensions de la formule

$$\Delta m = 1/g \Delta f + f/g^2 \Delta g$$
$$[M] = \frac{1}{\left[\frac{L}{T^2}\right]} \left[\frac{M L}{T^2}\right] + \frac{\left[\frac{M L}{T^2}\right]}{\left[\frac{L^2}{T^4}\right]} \left[\frac{L}{T^2}\right]$$
The diagram illustrates the dimensional consistency of the equation. Red lines connect the terms in the first equation to their corresponding dimensional representations in the second equation: a line from Δm to [M], a line from 1/g to [L/T²], a line from Δf to [ML/T²], a line from f/g² to [ML/T²] / [L²/T⁴], and a line from Δg to [L/T²].

En simplifiant à droite on retrouve bien [M] qui est à gauche. Les deux membres de l'équation sont cohérents. Ils ont la même nature de masse.

Petit retour sur les unités.

Pour mesurer la pression (force par unité de surface, dimensions $[M L^{-1} T^{-2}]$, on a nombre d'unités.

systeme S.I. : le **pascal (Pa)** ou N/m^2

le **bar** qui vaut **100 kPa**

l'**atmosphère (atm)** qui vaut **1013,25 hPa**

le **mmHg** ou **Torr** valant **133,3 Pa** ($1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr}$)

la **barye** ($= 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-2} = 0,1 \text{ Pa}$)

le **psi** (pound per square inch) valant **6894 Pa**

Il y a aussi le **pièze**, le **kg/cm²**

c'est ... infernal !