

Fonctions logarithmes et exponentielles

Dr Romain LE PENNEC

2025

Rappels

■ Notation

$$\log_{(a)} x \quad \log_{(10)} x = \log(x) \quad \ln(x)$$

x	1	10	100		10 ⁿ
Log(x)	0	1	2		n

■ Liaison

$$\log_{(a)} x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}$$

■ Propriétés

$$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^x) = x.\ln(a) \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(b^{-1}) = -\ln(b)$$

Rappels

- Notation

$$\exp(x) \quad e^{(x)}$$

- Liaison

$$\exp[\ln(x)] = \ln[\exp(x)] = x$$

- Propriétés

$$e^{(a-b)} = \frac{e^{(a)}}{e^{(b)}}$$

$$e^{(a+b)} = e^{(a)} \cdot e^{(b)}$$

$$e^{(a.b)} = e^{(a)^b} = e^{(b)^a}$$

Applications

$$\log 2 = 0,3$$

■ Calculer $\log(2 \cdot 10^5), \log(2 \cdot 10^{-5}), \log\left(\frac{1}{(2 \cdot 10^{-5})}\right), \log_{(2)} 512$

$$\log(2 \cdot 10^5) = \log 2 + \log 10^5$$

$$\log(2 \cdot 10^5) = 5,3 \quad \text{avec} \quad \log 10^5 = 5$$

$$\log(2 \cdot 10^{-5}) = \log 2 - \log 10^5 \quad \log(2 \cdot 10^{-5}) = -4,7$$

$$\log\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-5}}\right) = \log 1 - \log(2 \cdot 10^{-5}) \quad \log\left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-5}}\right) = 4,7$$

$$\log_{(2)} 512 = \frac{\ln 512}{\ln 2} = \frac{\ln 2^9}{\ln 2} \quad \ln 2^9 = 9 \ln 2 \quad \log_{(2)} 512 = 9$$

Applications

- Simplifier les expressions $e^{\left(\frac{\ln 5}{2}\right)}, e^{(1+\ln 6)}, e^{(-3\ln 4)}$

$$e^{\left(\frac{\ln 5}{2}\right)} = e^{\left(\frac{1}{2} \cdot \ln 5\right)} = e^{\left(\ln 5^{\frac{1}{2}}\right)} = \sqrt{5}$$

$$e^{(1+\ln 6)} = e \cdot e^{(\ln 6)} = 6e$$

$$e^{(-3\ln 4)} = e^{(\ln 4^{-3})} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Applications

- Résoudre les équations

$$(e^x - 6) \cdot (e^x + 1) = 0$$

$$(e^x + 1) > 0$$

$$(e^x - 6) = 0 \quad e^x = 6 \quad x = \ln 6$$

Applications

■ Résoudre les équations

$$e^{\frac{x}{2} \cdot \ln 2} = 256$$

$$\frac{x}{2} \cdot \ln 2 = \ln 256$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\ln 256}{\ln 2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\ln 2^8}{\ln 2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{8 \cdot \ln 2}{\ln 2}$$

$$\frac{x}{2} = 8$$

$$x = 16$$

Exercice 2

Soit $y=Ae^{-\alpha x}$ avec A , α et $x>0$

- Donner les expressions $\ln y$ et $\log y$

$$\ln y = \ln(A.e^{-\alpha x}) = \ln A + \ln(e^{-\alpha x})$$

$$\ln y = \ln A - \alpha x$$

$$\log y = \log(A.e^{-\alpha x}) = \frac{\ln(A.e^{-\alpha x})}{\ln 10}$$

$$\log y = \log A - \frac{\alpha x}{\ln 10}$$

Exercice 2

- Procéder à un changement de variable pour faire apparaître des fonctions simples

$$\ln y = \ln A - \alpha x$$

$$\ln A = \text{constante}$$

$$Y = K - \alpha x$$

$$\text{Pente} = -\alpha$$

$$\log y = \log A - \frac{\alpha x}{\ln 10}$$

$$\log A = \text{constante}$$

$$Y = K' - \frac{\alpha x}{\ln 10}$$

$$\text{Pente} = -\alpha / \ln 10$$

Exercice 2

- Calculer la période ou la demi-vie T

à t $f(t) = Ae^{-\alpha t}$

à t+T $f(t+T) = Ae^{-\alpha(t+T)}$ $f(t+T) = \frac{Ae^{-\alpha t}}{2}$

$$e^{-\alpha(t+T)} = e^{-\alpha t} \cdot e^{-\alpha T} = \frac{e^{-\alpha t}}{2}$$

$$e^{-\alpha T} = \frac{1}{2}$$

$$e^{\alpha T} = 2$$

$$\alpha T = \ln 2$$

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

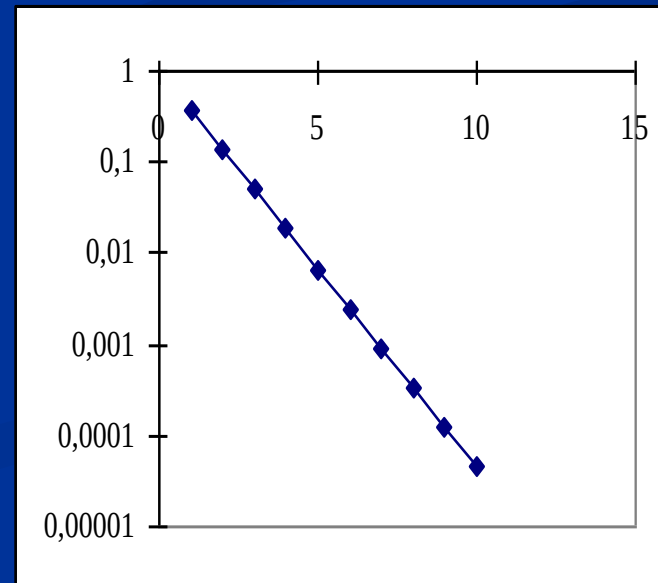
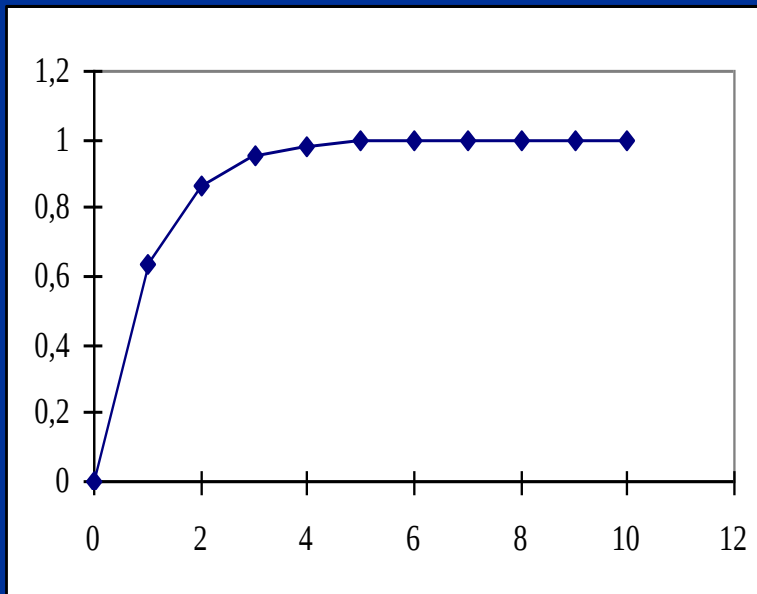
Exercice 2

■ Linéariser $y = 1 - e^{-x}$

$$y - 1 = -e^{-x} \quad \text{d'où} \quad 1 - y = e^{-x} \quad \text{et} \quad \ln(1 - y) = -x$$

avec $\ln(1 - y) = Y$ on a $Y = -x$

fonction exponentielle représentée par une droite en échelle semilog y



Exercice 2

- Linéariser $y = \frac{x^2}{3}$

$$y = \frac{1}{3} x^2 \quad \text{d'où} \quad \ln y = \ln\left(\frac{1}{3} x^2\right) \quad \text{et} \quad \ln y = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2 \ln x$$

$$Y = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2X \quad \text{soit} \quad Y = K + 2X \quad \text{en posant} \quad \begin{array}{l} Y = \ln y \\ X = \ln x \end{array}$$

fonction puissance représentée par une droite en échelle log x et y

