Equations différentielles

Dr Romain LE PENNEC

2023

Définition

Une équation différentielle est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s).

Les équations différentielles font partie des équations fonctionnelles, dont l'inconnue est une fonction et non un nombre.

La résoudre (ou l'intégrer) revient à trouver une expression générale pour toutes ses solutions. On appelle solution ou intégrale de l'équation différentielle toute fonction dérivable vérifiant la solution concernée.

Généralités

Utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, comme la radioactivité, la thermodynamique ou la mécanique céleste.

La dynamique des populations en est un exemple simple

$$x'(t) = K\,x(t)$$

L'accroissement de la population $x'(t)$ est, à chaque instant, proportionnel à la taille de la population $x(t)$.

$\longrightarrow$ Phénomène de croissance exponentielle

Généralités

Équation différentielle:

- Lie une ou plusieurs fonctions et ses/leurs dérivées.
- Exemples: $y' + 2y = 0$ 1er ordre

  $y'' - 5y' + y + 1 = 0$ 2ème ordre

  $y'' + k^2 y = 0$ 2ème ordre

- De manière formelle, $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

- Ordre de l'équation: celui de la dérivée d'ordre maximum
- $y = cste$, $y' = 0$
- $y\uparrow$, $y' > 0$
- $y\downarrow$, $y' < 0$

Généralités

- Intégrer une équation différentielle :

Rechercher toutes les fonctions j qui vérifient la relation. Cette fonction j s’appelle solution ou intégrale de l’équation.

Équations différentielles à variables séparées

- Équation de la forme: $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$$ou$$

$$f(x)dx = g(y)dy$$

f(x) étant une fonction de x seul et g(y) une fonction de y seul

- La solution s'obtient en intégrant séparément les 2 membres sans oublier la constante d'intégration C

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

C: constante d'intégration

- Enfin, on essaie de donner les solutions sous la forme y = φ (x)

Règles de dérivation

$f(x)$	$f'(x)=\dfrac{df}{dx}$

$$a(=cste)\rightarrow 0$$

$$ax(a=cste)\rightarrow a$$

$$x^n \rightarrow nx^{n-1}$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\ln(ax+b)\rightarrow \frac{a}{(ax+b)}$$

$$a^x \rightarrow a^x \ln a$$

$$e^{ax} \rightarrow a.e^{ax}$$

$$e^x \rightarrow e^x$$

$f'(x)$	$f(x)$

$$x^n \rightarrow \frac{nx^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\frac{1}{x}\rightarrow \ln x$$

$$\frac{1}{(ax+b)}\rightarrow \frac{\ln(ax+b)}{a}$$

$$e^{ax} \rightarrow \frac{1}{a}.e^{ax}$$

Règles de dérivation

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = nbre \rightarrow f'(x) = 0$$

$$g(x) = nbre * f(x) \rightarrow g'(x) = nbre * f'(x)$$

somme →

$$h(x) = f(x) \pm g(x) \rightarrow h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

produit →

$$h(x) = f(x) * g(x) \rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

quotient →

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$h(x) = (f(x))^n \rightarrow h'(x) = n(f(x))^{n-1}.f'(x)$$

Résolutions d'équations différentielles

1. Donner les solutions des expressions suivantes :

1. dy/dx-xy=0

Equation différentielle 1er ordre sans second membre

Résolution:

1) Séparation des termes:

$$\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$ou$$

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

1. Donner les solutions des expressions suivantes :

1. dy/dx-xy=0

Résolution:

2) Intégration :

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + \ln cste$$

$$car$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2xdx}{2} = xdx$$

1. Donner les solutions des expressions suivantes :

1. dy/dx-xy=0

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + \ln cste$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + cste_2 \qquad (\ln cste_1 = cste_2)$$

$$e^{\ln y} = e^{(\frac{x^2}{2} + cste_2)}$$

$$y = e^{(\frac{x^2}{2} + cste_2)} = e^{\frac{x^2}{2}} * e^{cste_2} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Résolutions d'équations différentielles

2. Trouver les solutions particulières :

2. <u>dN/dt + kN = 0, avec N=N0 pour t=0</u>

$$\frac{dN}{N} = -k\,dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int -k\,dt$$

$$\ln N = -kt + \ln C$$

$$e^{\ln N} = e^{(-kt + \ln C)}$$

$$N = Ce^{-kt}$$

$$N = N_0 e^{-kt}$$

Applications (1)

Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$\gamma.P.dV + V.dP = 0$$

$$\gamma.P.dV = -V.dP$$

$$\gamma.\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$\gamma \ln(V) = -\ln(p) + \ln(cste)$$

$$\ln(V)^{\gamma} + \ln p = \ln cste$$

$$e^{\ln(p*V^{\gamma})} = e^{\ln cste} \longrightarrow pV^{\gamma} = cste$$

II. Applications (2)

Un radioisotope, le radium (Ra), se désintègre en radon (Rd).

λ : constantes radioactives du radium

À t = 0, la source comporte N_0 atomes de radium. Ils se désintègrent avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs présents.

II. Applications (2)

Les noyaux instables d'une espèce donnée ne se désintègrent pas tous en même temps. Il est impossible de prévoir quand l'un des noyaux se désintègrera. Mais chaque noyau est caractérisé par une probabilité définie de désintégration.

- N : nombre de noyaux
- λ : probabilité de désintégration d'un noyau par unité de temps = constante radioactive
- Nombre de noyaux ayant subi une désintégration pendant la durée dt est $\lambda N dt$

II. Applications (2)

La variation dN du nombre N pendant la durée dt est donc:

$$dN = -\lambda N dt$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int -\lambda dt$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln cste$$

$$e^{\ln N} = e^{(-\lambda t + \ln cste)}$$

$$N = cste * e^{-\lambda t}$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

II. Applications (2)

Période radioactive: intervalle de temps T au bout duquel la moitié des noyaux s'est désintégrée

Si N représente le nombre de noyaux à la date t, au bout d'une période T le nombre de noyaux sera de N/2 soit :

$$N(t+T) = \frac{N(t)}{2}$$

II. Applications (2)

Si N_0 représente le nombre de noyaux à la date $t_0 = 0$ alors:

$$N(t) = N_0 e^{- / t}$$

et

$$N(t+T) = N_0 e^{- / (t+T)}$$

soit

$$\frac{N(t+T)}{N(t)} = \frac{1}{2}$$

soit

$$\frac{N(t+T)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{-\lambda(t+T)}}{N_0 e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

II. Applications (3)

Une population double en 50 ans.

Au bout de combien de temps aura t-elle triplé si l'accroissement de la population en fonction du temps est proportionnel à l'effectif de la population?

dP : accroissement de la population

dP/dt : vitesse de variation de P selon t

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

1) Séparation

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

2) Intégration

$$\ln P = kt + C$$

$$P = Ce^{kt}$$

$$P = P_0 e^{kt}$$

$$et$$

$$k = \frac{\ln 2}{T(tps.doublement)}$$

II. Applications (3)

Application numérique

T=50 ans

$$P = P_0 e^{kt}$$

$$3P_0 = P_0 e^{+\frac{\ln 2}{50}t}$$

$$\ln 3 = \frac{\ln 2}{50} t$$

$$t = 50 * \frac{\ln 3}{\ln 2} = 79.248 ans$$

II. Applications (4)

Pour les cultures de bactéries, la vitesse d'accroissement de leur nombre est proportionnelle à la quantité de bactéries présentes.

A) Si leur nombre double toutes les 2h, combien y en aura-t-il au bout de la 5ème heure?

$$\frac{dn}{dt} = kn$$

$$n = n_0 e^{+\frac{\ln 2}{T} * t}$$

$$n = n_0 e^{+\frac{\ln 2}{2} * 5}$$

$$n = 5.64 n_0$$

II. Applications (4)

B) combien y avait-il de bactéries initialement si on en compte 5.10^3 à 2H et 8.10^4 à 6H?

T indéterminé avec $n = n_0 e^{+\frac{\ln 2}{T}t}$

Entre 2 et 6H, le nb de bactéries passe de 5.10^3 à 8.10^4 soit un rapport de 16 ou 2^4 soit T=1H

$$8.10^4 = n_0 e^{+\frac{\ln 2}{1}*6} = n_0 2^6 = 64 n_0$$

$$n_0 = \frac{8.10^4}{64} = 1250$$