# Fonctions logarithmes et exponentielles

Dr Romain LE PENNEC

2024

# Rappels

- Notation $\log_{(a)} x$ $\quad \log_{(10)} x = \log(x)$ $\quad \ln(x)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 10 | 100 | …… | $10^n$ |
| Log(x) | 0 | 1 | 2 | …… | n |

- Liaison $\log_{(a)} x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $\quad \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}$

- Propriétés $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$$\ln(a^x) = x.\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(b^{-1}) = -\ln(b)$$

# Rappels

- Notation $\exp(x) \qquad e^{(x)}$

- Liaison $\exp[\ln(x)] = \ln[\exp(x)] = x$

- Propriétés

$$\mathrm{e}^{(a-b)} = \frac{\mathrm{e}^{(a)}}{\mathrm{e}^{(b)}} \qquad \mathrm{e}^{(a+b)} = \mathrm{e}^{(a)}.e^{(b)}$$

$$\mathrm{e}^{(a.b)} = \mathrm{e}^{(a)^{b}} = e^{(b)^{a}}$$

# Applications

$\log 2 = 0,3$

- Calculer $\log(2.10^5), \log(2.10^{-5}), \log\left(\frac{1}{(2.10^{-5})}\right), \log_{(2)} 512$

$$\log(2.10^5) = \log 2 + \log 10^5$$

$$\log(2.10^5) = 5,3$$ avec $$\log 10^5 = 5$$

$$\log(2.10^{-5}) = \log 2 - \log 10^5 \qquad \log(2.10^{-5}) = -4,7$$

$$\log\left(\frac{1}{2.10^{-5}}\right) = \log 1 - \log\left(2.10^{-5}\right) \qquad \log\left(\frac{1}{2.10^{-5}}\right) = 4,7$$

$$\log_{(2)} 512 = \frac{\ln 512}{\ln 2} = \frac{\ln 2^9}{\ln 2} \qquad \ln 2^9 = 9 \ln 2 \qquad \log_{(2)} 512 = 9$$

# Applications

- Simplifier les expressions $e^{\left(\frac{\ln 5}{2}\right)}, e^{(1+\ln 6)}, e^{(-3\ln 4)}$

$$e^{\left(\frac{\ln 5}{2}\right)} = e^{\left(\frac{1}{2}.\ln 5\right)} = e^{\left(\ln 5^{\frac{1}{2}}\right)} = \sqrt{5}$$

$$e^{(1+\ln 6)} = e.e^{(\ln 6)} = 6e$$

$$e^{(-3\ln 4)} = e^{\left(\ln 4^{-3}\right)} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

# Applications

- Résoudre les équations

$$\left(e^x - 6\right).\left(e^x + 1\right) = 0$$

$$\left(e^x + 1\right) > 0$$

$$\left(e^x - 6\right) = 0 \qquad e^x = 6 \qquad x = \ln 6$$

# Applications

- Résoudre les équations

$$e^{\frac{x}{2}.\ln 2} = 256$$

$$\frac{x}{2}.\ln 2 = \ln 256 \qquad \frac{x}{2} = \frac{\ln 256}{\ln 2} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\ln 2^8}{\ln 2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{8.\ln 2}{\ln 2} \qquad \frac{x}{2} = 8 \qquad x = 16$$

# Exercice 2

Soit $y=Ae^{-\alpha x}$ avec A, α et x>0

- Donner les expressions lny et logy

$$\ln y = \ln\left(A.e^{-\alpha x}\right) = \ln A + \ln\left(e^{-\alpha x}\right)$$

$$\ln y = \ln A - \alpha x$$

$$\log y = \log\left(A.e^{-\alpha x}\right) = \frac{\ln\left(A.e^{-\alpha x}\right)}{\ln 10}$$

$$\log y = \log A - \frac{\alpha x}{\ln 10}$$

# Exercice 2

- Procéder à un changement de variable pour faire apparaître des fonctions simples

$$\ln y = \ln A - \alpha x$$

lnA = constante

$$Y = K - \alpha x$$

Pente = -α

$$\log y = \log A - \frac{\alpha x}{\ln 10}$$

logA = constante

$$Y = K' - \frac{\alpha x}{\ln 10}$$

Pente = -α/ln10

# Exercice 2

- Calculer la période ou la demi-vie T

à t $$f(t) = Ae^{-\alpha t}$$

à t+T $$f(t+T) = Ae^{-\alpha(t+T)} \qquad f(t+T) = \frac{Ae^{-\alpha t}}{2}$$

$$e^{-\alpha(t+T)} = e^{-\alpha t} . e^{-\alpha T} = \frac{e^{-\alpha t}}{2} \qquad e^{-\alpha T} = \frac{1}{2}$$

$$e^{\alpha T} = 2 \qquad \alpha T = \ln 2 \qquad \boxed{T = \frac{\ln 2}{\alpha}}$$

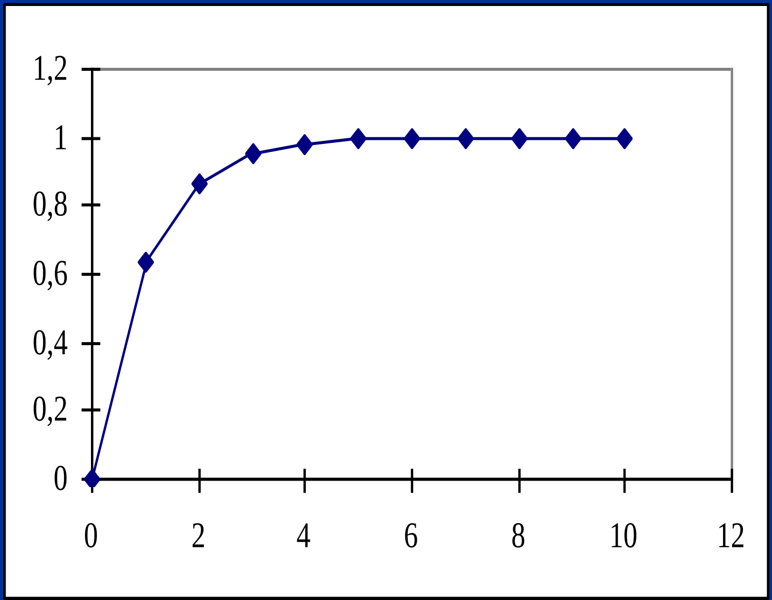
# Exercice 2

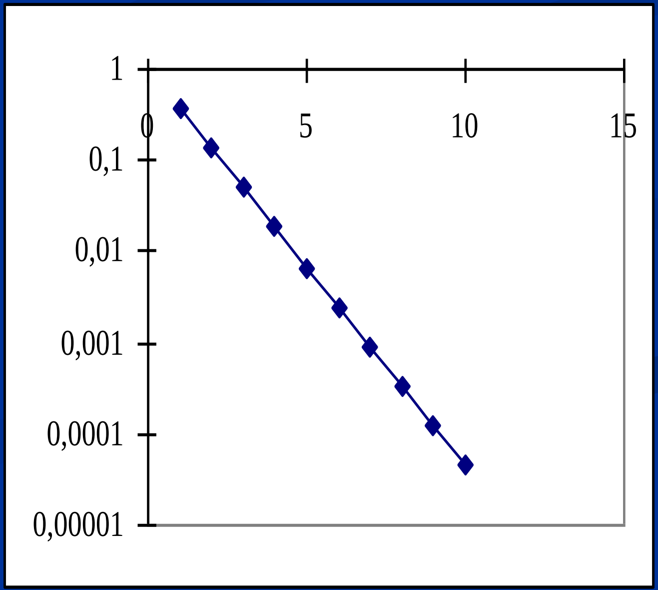
- Linéariser $y = 1 - e^{-x}$

$y - 1 = -e^{-x}$ d' où $1 - y = e^{-x}$ et $\ln(1-y) = -x$

avec $\ln(1-y) = Y$ on a $Y = -x$

fonction exponentielle représentée par une droite en échelle semilog y



# Exercice 2

- Linéariser $y = \dfrac{x^2}{3}$

$y = \dfrac{1}{3}x^2$ d'où $\ln y = \ln(\dfrac{1}{3}x^2)$ et $\ln y = \ln(\dfrac{1}{3}) + 2\ln x$

$Y = \ln(\dfrac{1}{3}) + 2X$ soit $Y = K + 2X$ en posant $Y = \ln y$, $X = \ln x$

fonction puissance représentée par une droite en échelle log x et y